Lernzettel Mathe-Klausur: Kurvendiskussion & Ableitungen

90 Minuten · erste max. 20 Min. ohne Hilfsmittel (OHiMi) · danach Formelsammlung + Taschenrechner · keine Polynomdivision

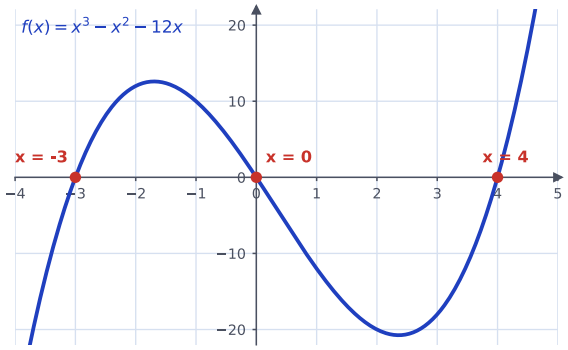
Ablauf

- 10 Min. vor dem Klingeln da sein (Einweisung, Austeilen). Start mit dem Klingeln, Dauer exakt 90 Min.
- **Teil 1** (max. 20 Min.) ohne Hilfsmittel, danach mit Lösungen abgeben. **Teil 2** mit gestellter Formelsammlung und eigenem Taschenrechner.
- Nur offizielle Zeitverlängerung, vorher persönlich bei der Lehrkraft melden.
- Verteilung: ⅓ Basiswissen (AFB I), ½ Anwenden (AFB II), ⅙ Knobeln/Interpretieren (AFB III).

Nullstellen: f(x) = 0 setzen

Wann?	Vorgehen	Beispiel
jeder Term hat x	x ausklammern, ein Faktor = 0 reicht (Nullprodukt)	$x^3-x^2-12x = x(x^2-x-12) \to x = 0, -3, 4$
x^2, x, Zahl	erst durch Zahl vor x^2 teilen, dann p-q-Formel	$x^2-7x+12 = 0 \to x = 3{,}5 \pm 0{,}5 \to 4; 3$
nur x^4, x^2, Zahl	z = x^2, p-q für z, dann x = ±√z	$x^4-5x^2+4 \to z = 4; 1 \to x = \pm 2; \pm 1$

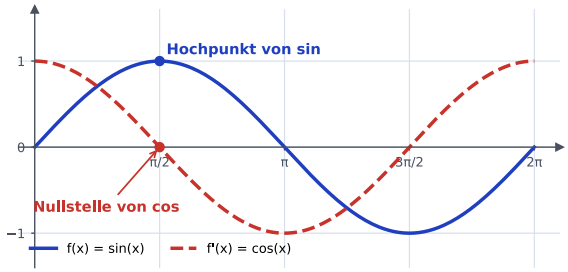
p-q-Formel: $x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$. Unter der Wurzel negativ → keine Lösung, 0 → eine Lösung. Negatives z → keine x-Werte.



Ableitungen

Regel	So geht's	Beispiel
Potenz	Hochzahl nach vorne, Hochzahl − 1	$x^5 \to 5x^4$, $x \to 1$
Zahl / Faktor	Zahl allein fällt weg, Faktor bleibt	$-4x^3+7 \to -12x^2$
Summe	Teil für Teil	$-4x^3+13x \to -12x^2+13$
Sinus / Kosinus	sin wird cos, cos wird −sin	$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
lin. Kette	außen ableiten · innere Ableitung m	$(5x+3)^4 \to 20(5x+3)^3$
Produkt	$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$	$x^2\cdot\sin x \to 2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x$

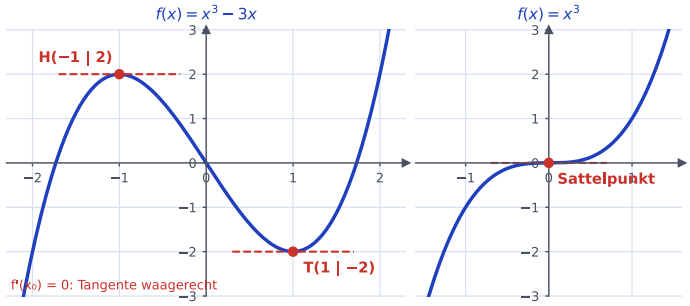
$a\cdot\sin(bx+c)+d \to a\cdot b\cdot\cos(bx+c)$ (d fällt weg). √x = $x^{0,5}$, 1/x = x^{-1}. f'' = f' nochmal ableiten.



Hoch- und Tiefpunkte

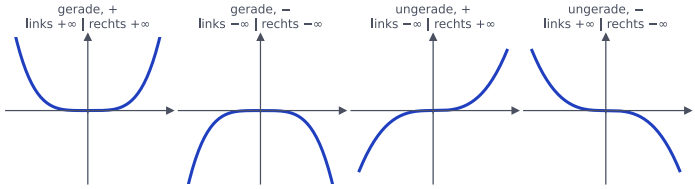
1. **Notwendig:** f'(x) = 0 lösen → Kandidaten x_0.
2. **Hinreichend:** x_0 in f'' einsetzen. **f''(x_0) < 0 → Hochpunkt**, **f''(x_0) > 0 → Tiefpunkt**.
3. f''(x_0) = 0 → Werte links/rechts vergleichen (Vorzeichenwechsel von f'). Kein Wechsel → Sattelpunkt.
4. **y-Wert:** x_0 in f einsetzen, H(x_0 | y_0) angeben.

Beispiel $f(x) = x^3 - 3x$: f'(x) = $3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$. f''(x) = 6x: f''(1) = 6 > 0 → T(1 | −2), f''(−1) = −6 < 0 → H(−1 | 2).



Grenzverhalten (x → ±∞)

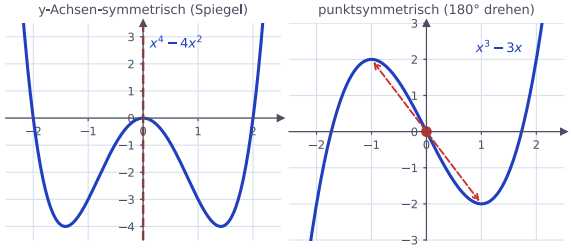
Nur die **höchste Potenz** zählt: Hochzahl gerade oder ungerade? Zahl davor + oder −?



Beispiel: $10x^{65} - 28x^{107}$: 107 ungerade, −28 negativ → rechts −∞, links +∞.

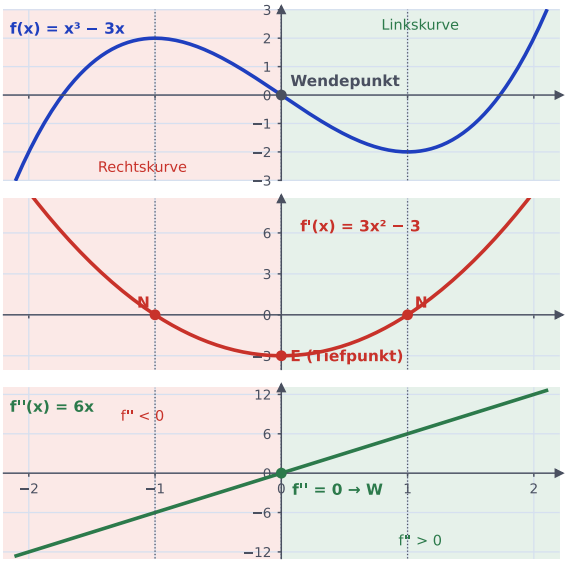
Symmetrie

Hochzahlen	Symmetrie	Probe
nur gerade (Zahl allein zählt als gerade)	y-Achse	$f(-x) = f(x)$
nur ungerade (keine Zahl allein!)	Ursprung	$f(-x) = -f(x)$
gemischt	keine	



Krümmung & Wendepunkte (nur erkennen)

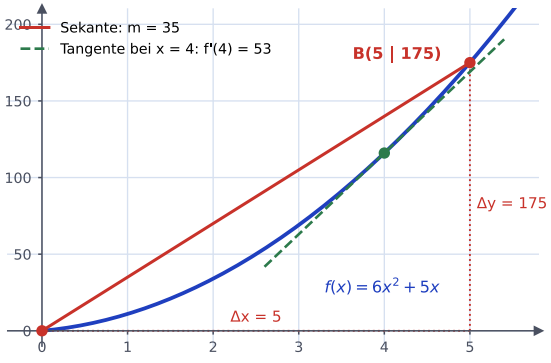
- **f'' > 0 → Linkskurve** (Tal). **f'' < 0 → Rechtskurve** (Berg). Merke: pos**i**tiv/l**i**nks, n**e**gativ/r**e**chts.
- **Wendepunkt** = Krümmungswechsel. Kurve ist dort am steilsten oder flachsten. Sattelpunkt = Wendepunkt mit Steigung 0.
- **N-E-W:** Nullstelle von f' → Extremstelle von f. Extremstelle von f' → Wendestelle von f.



Mittlere Änderungsrate

$m = (f(b) - f(a)) / (b - a)$ = Steigung der Sekante = Durchschnitt über [a; b]. f'(x₀) dagegen = Steigung genau an einer Stelle (Tangente).

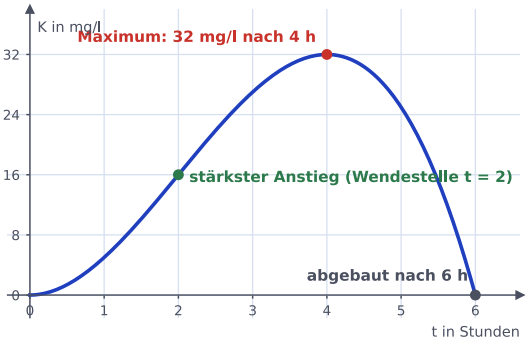
Beispiel $f(x) = 6x^2 + 5x$ auf [0; 5]: (175 − 0) / 5 = 35.



Sachkontext: Text → Rechnung

Im Text	Rechnung
„Wie viel nach 2 h?“ / „zu Beginn“	f(2) / f(0)
„Wann am höchsten / niedrigsten?“	Extrema, y-Wert angeben
„Wann ist der Wert 120?“ / „wann null?“	f(x) = 120 / f(x) = 0
„Wie schnell ändert sich … gerade?“	f'(x₀)
„Im Durchschnitt zwischen …“	mittlere Änderungsrate
„Zeige: steigt / fällt“	f'(x) > 0 / f'(x) < 0
„Wann am stärksten Zu-/Abnahme?“	Wendestelle, am Graphen erkennen

Beispiel Wirkstoff $K(t) = -t^3 + 6t^2$: K'(t) = −3t² + 12t = 0 → t = 4, K''(4) = −12 < 0, K(4) = 32 → Maximum 32 mg/l nach 4 h. K = 0 → t²(6 − t) = 0 → abgebaut nach 6 h. Durchschnitt [0; 4]: 8 mg/l pro h.



Immer: Definitionsbereich beachten, Antwortsatz mit Einheit.

Rekonstruktion

1. Ansatz + Ableitung: $f = ax^2 + bx + c$, $f' = 2ax + b$ (Grad 3: ax^3+bx^2+cx+d).
2. Jede Info → Gleichung (Tabelle). 3. Gleichungssystem lösen. 4. Einsetzen, Probe.

Info	Gleichung
Punkt P(2 | 5) / y-Achse bei −3 / Nullstelle 4	f(2) = 5 / f(0) = −3 / f(4) = 0
Hoch-/Tiefpunkt (3 | 2)	**zwei:** f(3) = 2 und f'(3) = 0
Steigung 4 bei x = 1	f'(1) = 4
y-Achsen- / punktsymmetrisch	nur gerade / nur ungerade Hochzahlen

Beispiel Grad 2, $S_y(0 \mid -3)$, H(3 | 2): c = −3; 9a + 3b + c = 2; 6a + b = 0 → b = −6a → −9a − 3 = 2 → $a = -5/9$, $b = 10/3$ → $f(x) = -5/9 \cdot x^2 + 10/3 \cdot x - 3$.

